



TITLE:

ある種の無限積について

AUTHOR(S):

豊泉, 正男

---

CITATION:

豊泉, 正男. ある種の無限積について. 数理解析研究所講究録 1984, 517: 105-108

ISSUE DATE:

1984-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98395>

RIGHT:

# ある種の無限積について

東洋大・工 豊泉正男 (Masao Toyoizumi)

$\lambda > 0$  に対し  $f(\lambda) = \exp(2\pi i z / \lambda) (Im(z) > 0)$  とおくとき.

$$\eta(z) = \exp(\pi i z / 12) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f(1)^n)$$

と

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f(2)^{2n}) (1 + f(2)^{2n-1})^2$$

が weight  $\frac{1}{2}$  の modular form であることはよく知られている。本稿では、ある種の無限積で定義された modular form を決定する。なお、証明等は、[2] を参照して下さい。

まず、 $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{Z} \supset \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{で} \quad a(n) = O(n^c) \quad (\exists c > 0)$$

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

$$\xi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) \zeta(s+1) \quad \text{とおく.}$$

さらに、

$$f(z) = \exp(2\pi i a z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q(\lambda)^n)^{a(n)} \quad (1)$$

とおくとき、 $f(z)$  は上半平面で正則な函数になる。(1) の対数をと  
り、Melin 変換を使えば、次を得る。

補題1  $k \in \mathbb{R}$  のとき.

$$(A) \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^k f(z)$$

 $\longleftrightarrow$ 

(B)  $\xi(\rho) + \frac{k}{\rho^2} + 2\pi\left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{1+\rho}\right)$  が任意の垂直な帯領域で有界な正則函数で,  $\xi(\rho) = \xi(-\rho)$

条件(B)を $\varphi(n)$ で(i)なおすと.

補題2  $k \in \mathbb{R}$  のとき.

(A)  $\iff$  (C) (i)  $\varphi(s)$  が全平面で有理型な函数に解析  
接続できる

(2)  $\Lambda(\Lambda-1)\varphi(\Lambda)\zeta(\Lambda+1)$  が位数有限な整函数

$$(3) \quad \lambda^s \varphi(s) \zeta(-s) = \lambda^{-s} \varphi(-s) \zeta(s)$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 1} s Y(s) = \frac{24a}{\lambda}, \quad Y(0) = -R$$

次に, Dirichlet 級数に関する補題を述べます.

補題3  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  で収束する Dirichlet 級数  $D(s) (\neq 0)$  が全平面で有限個の poles をもつ位数有限な有理型函数に解析接続でき.  $\lambda^s D(s) = \lambda^{-s} D(-s)$

$\Rightarrow \lambda^2 \in \mathbb{N}$  である.

$$D(s) = \sum_{n|\lambda^2} \frac{c(n)}{n^s}, \text{ 但し } c(n) = c(\lambda^2/n) (\forall n|\lambda^2)$$

以下、次を仮定しておく.

(仮定)  $\varphi(s)$  が全平面で有限個の poles をもつ、有理型函数に解析接続でき、 $\varphi(s) \neq 0$ .

このとき、補題2と補題3から次がでる。

定理  $\exists k \in \mathbb{R}$  such that

$$f(-\frac{1}{z}) = \left(\frac{z}{i}\right)^k f(z) \quad (2)$$

$\Rightarrow \lambda^2 \in \mathbb{N}$  である.

$$f(z) = \exp(2\pi i a z) \prod_{m|\lambda^2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q(\lambda)^{nm})^{c(m)} \quad (3)$$

ここで、 $c(m) (m|\lambda^2) \in \mathbb{Z}$  である.  $c(m) = c(\lambda^2/m) (\forall m|\lambda^2)$

$$a = \frac{\lambda}{24} \sum_{m|\lambda^2} \frac{c(m)}{m} \quad (4)$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{m|\lambda^2} c(m) \quad (5)$$

逆に,  $\lambda^2 \in \mathbb{N}$  で,  $c(m) (m|\lambda^2) \in \mathbb{Z}$ ,  $c(m) = c(\lambda^2/m)$   
 $(\forall m|\lambda^2)$  のとき,  $f(z)$ ,  $a$ ,  $k$  を (3), (4), (5) で"定めれば".  
 $f(z)$  は, (2) をみたす。

系  $\lambda = 1$  で,  $\exists k \in \mathbb{R}$  such that

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k f(z)$$

$\Rightarrow$

$$f(z) = \eta(z)^{24a}$$

これは, [1] の結果である。

[1] On certain infinite products, to appear  
in Mathematika.

[2] On certain infinite products II,  
preprint.